**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Алгебра и теория чисел

Algebra and Number Theory

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 20

Регистрационный номер рабочей программы: 008871

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Обучение студентов основным алгебраическим методам; развитие у студентов доказательного, логического мышления; подготовка к восприятию других математических дисциплин. Уметь использовать методы и инструментальные средства исследования объектов профессиональной деятельности

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Общее среднее образование.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Уметь использовать методы и инструментальные средства исследования объектов профессиональной деятельности

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Знать содержание дисциплины "Алгебра" и иметь достаточно полное представление о возможностях её в других разделах математики и в приложениях; иметь представление об основных алгебраических структурах: группах, кольцах, полях, векторных пространствах; иметь представление об арифметике колец, в частности, колец многочленов; владеть основами матричной и операторной алгебры в соответствии с программой курса.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.2 Базовый курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 1 | 46 |  | 2 | 44 |  | 4 | 2 |  | 4 |  |  |  | 56 | 12 | 46 |  | 30 | 6 |
|  | 2-100 |  | 2-100 | 2-25 |  | 2-25 | 2-100 |  | 2-25 |  |  |  | 1-1 | 1-1 | 1-1 |  |  |  |
| Семестр 2 | 62 |  | 2 | 26 |  | 4 | 2 |  | 4 |  |  |  | 35 | 10 | 35 |  | 20 | 5 |
|  | 2-100 |  | 2-100 | 2-25 |  | 2-25 | 2-100 |  | 2-25 |  |  |  | 1-1 | 1-1 | 1-1 |  |  |  |
| Семестр 3 | 32 |  | 2 | 40 |  | 4 |  |  | 4 |  |  |  | 17 | 4 | 41 |  | 20 | 4 |
|  | 2-100 |  | 2-100 | 2-25 |  | 2-25 |  |  | 2-25 |  |  |  | 1-1 | 1-1 | 1-1 |  |  |  |
| Семестр 4 | 64 |  | 2 | 26 |  | 4 |  |  | 4 |  |  |  | 36 | 12 | 32 |  | 10 | 5 |
|  | 2-100 |  | 2-100 | 2-25 |  | 2-25 |  |  | 2-25 |  |  |  | 1-1 | 1-1 | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | 204 |  | 8 | 136 |  | 16 | 4 |  | 16 |  |  |  | 144 | 38 | 154 |  |  | 20 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 1 | контрольные работы, коллоквиум | в соответствии с расписанием | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации |  |  |
| Семестр 2 | контрольные работы, коллоквиум | в соответствии с расписанием | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации |  |  |
| Семестр 3 | контрольные работы | в соответствии с расписанием | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации |  |  |
| Семестр 4 | контрольные работы | В соответствии с расписанием | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

**Первый семестр**

**Модуль 1.** Алгебраические структуры (4 часа лекций, 2 часа практики, 6 часов самост. работы)

Группы и подгруппы. Кольца и подкольца. Идеалы. Определение поля, примеры, идеалы в поле. Определение и свойства векторного пространства. Определение тела, алгебры над полем , свойства . Область целостности и евклидово кольцо. Кольцо Гауссовых целых чисел как пример евклидова кольца. Простые и неприводимые элементы в области целостности. Кольцо главных идеалов. Нётерово кольцо.

**Модуль 2.** Элементарная теория чисел(9 часов лекций, 10 часов практики, 8 часов самост. работы)

Наибольший общий делитель элементов в евклидовом кольце. Взаимно простые элементы. Основная теорема арифметики в евклидовом кольце. Факториальные кольца. Теорема об области главных идеалов как факториальном кольце. Бесконечность простых чисел в кольце целых чисел, варианты доказательства. Сравнения в Z . Отношение эквивалентности и фактор-множество. Класс эквивалентности по идеалу. Идеалы в Z. Фактор-кольцо Z по идеалу. Теорема Ферма в теории сравнений . Теорема Эйлера в теории сравнений. Решение сравнений первой степени. Мультипликативные числовые функции. Функция Эйлера. Системы вычетов. Китайская теорема об остатках. Лемма Гензеля и сведение сравнения по степени простого числа к первой степени. Сравнения для многочленов.

Контрольная работа по теме 2.

**Модуль 3.** Поле комплексных чисел (4 час. л., 4 час. пр., 6 час. самост. раб.)

Определение поля комплексных чисел, Теорема о существовании и единственности. Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексного числа. Модуль и аргумент, сопряжённые комплексные числа, свойства. Произведение комплексных чисел в тригонометрическом виде. Формула Муавра. Корни *n*-й степени из комплексного числа. Основная теорема алгебры

Контрольная работа по теме 3.

**Модуль 4.** Многочлены и дробно-рациональные функции (6 час. л., 5 час. пр., 8 час. самост. раб.)

Многочлены над кольцами. Теорема о старшем члене произведения многочленов. Степень произведения и суммы. Дифференцирование в области целостности. Производная многочлена и кратные корни. Алгебраически замкнутые поля. Неприводимые многочлены над полями комплексных и вещественных чисел. Поле частных области целостности. Дробно-рациональные функции. Разложение на простейшие дроби. Формула Тэйлора.

Контрольная работа по теме 4.

**Модуль 5.** Матрицы (5час. л., 4 час. пр., 6 час. самост. раб.)  
Действия над матрицами и их свойства. Транспонирование матриц. Элементарные преобразования и элементарные матрицы. Теоремы о приведении матриц элементарными преобразованиями. Обратимые матрицы.

**Модуль 6.** Определители(8 час. л., 9 час. пр., 8 час. самост. раб.)  
Перестановки, транспозиции, чётность перестановки. Определитель матрицы.(геометрический и алгебраический подход). Теорема о связи алгебраического и геометрического определения. Разложение по строке и другие свойства определителя. Теорема об определителе произведения матриц, теорема об определителе ступенчатой матрицы. Минорный ранг матрицы. Взаимная матрица. Нахождение обратной матрицы. Формулы Крамера.

Контрольная работа по темам 5 и 6.

**Модуль 7.** Векторные пространства и системы линейных уравнений (10 час. л.,10 час. пр., 14 час. самост. раб.)  
Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Понятие векторного пространства и подпространства, примеры. Линейная независимость векторов. Линейная оболочка. Базис и размерность. Координаты. Формула замены базиса. Ранг матрицы. Невырожденные матрицы. Теорема Кронекера – Капелли. Теорема Крамера. Однородные системы. Линейные отображения, ядро и образ. Соотношения между размерностями ядра и образа линейного отображения. Структура множества решений однородной системы линейных уравнений. Сумма и пересечение подпространств.

Контрольная работа по теме 7.

**Второй семестр**

**Модуль 8.** Дополнительные сведения о комплексных числах и многочленах (8 час. л., 6 час. пр., 6 час. самост. раб.)  
Решение алгебраических уравнений 3-й и 4-й степени. Логарифмическая и показательная функции. Кватернионы. Построение циркулем и линейкой правильных 5-угольника и 17-угольника. Классическая задача деления круга на *n* частей. Определитель Вандермонда. Интерполяционная задача. Интерполяционная формула Лагранжа. Метод Ньютона.

**Модуль 9.** Унитарные и евклидовы пространства (6 час. л., 2 час. пр., 4 час. самост. раб.)  
Скалярное произведение, матрица Грама, её изменение при замене базиса. Невырожденность скалярного произведения. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта. Унитарное и евклидово векторное пространство, норма. Неравенство Коши—Буняковского, неравенство треугольника. Ортогональное дополнение подпространства.

**Модуль 10.** Квадратичные формы (6 час. л., 4 час. пр., 4 час. самост. раб.)  
Билинейные и квадратичные формы. Матричная запись. Изменение матрицы квадратичной формы при линейном преобразовании. Теорема Лагранжа. Закон инерции квадратичных форм. Положительная определённость квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования.   
Контрольная работа

**Модуль 11.** Элементы теории групп (22 час. л., 10 час. пр., 15 час. самост. раб.)  
Подгруппы. Гомоморфизм групп, свойства. Ядро и образ гомоморфизма. Отношения смежности по подгруппе. Классы смежности. Теорема Лагранжа. Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Теоремы о гомоморфизме. Циклические группы. Симметрические группы. Классификация циклических групп. Свободная группа. Центр и коммутант. Действие группа на множестве. Прямые и полупрямые произведения. Теоремы Силова.   
Контрольная работа

**Модуль 12.** Модули над областями главных идеалов и линейные операторы (20 час. л., 4 час. пр., 6 час. самост. раб.)  
Гомоморфизмы модулей. Свободные модули. Инвариантность ранга. Нётеровы и артиновы модули и кольца. Теорема Гильберта о базисе. Подмодули свободных модулей над областями главных идеалов. Метод Гаусса для области главных идеалов. Теорема об элементарных делителях. Строение конечно порождённых модулей. Линейные операторы как модули над кольцом многочленов. Матрица линейного оператора. Диагонализируемые операторы. Характеристический многочлен линейного оператора. Циклическое пространство, его характеристический многочлен. Теорема Гамильтона – Кэли (для операторов). Канонические формы матрицы линейного оператора.

**Третий семестр**

**Модуль 13.** Дополнительные сведения о кольцах (8 час. л., 12 час. пр., 6 час. самост. раб.)  
Операции над идеалами. Теоремы о гомоморфизме и о соответствии для колец. Простые и максимальные идеалы. Теорема Гаусса о кольце многочленов над факториальным кольцом. Критерии неприводимости. Многочлены от нескольких переменных. Симметрические многочлены.   
Контрольная работа.

**Модуль 14.** Категории (6 час. л., 2 час. пр., 2 час. самост. раб.) Определение и примеры категорий. Универсальные объекты. Произведения и копроизведения. Функторы и естественные преобразования.

**Модуль 15.** Теория полей (18 час. л., 26 час пр., час. самост. раб.) Простое подполе. Алгебраические и трансцендентные расширения. Степень и базис трансцендентности. Строение простых алгебраических расширений. Сепарабельность. Поле разложения многочлена. Нормальные расширения. Классификация конечных полей. Цикличность мультипликативной группы. Теорема о примитивном элементе. Основная теорема теории Галуа. Норма и след. Теорема Гильберта 90. Куммеровы расширения. Разрешимость в радикалах.   
Контрольная работа.

**Четвертый семестр**

**Модуль 16.** Операторы в евклидовых и унитарных пространствах со скалярным произведением (8 час.л., 8 час. пр., 12 час. самост. раб.)   
Двойственное отображение. Изоморфность пространства и второго пространства функционалов. Сопряжённые операторы в евклидовом пространстве. Матрица сопряженного оператора в ортонормированном базисе. Сопряжённый оператор в унитарном пространстве, его матрица.  
Нормальные операторы в унитарном пространстве. Диагонализация матрицы нормального оператора. Нормальные операторы в евклидовом пространстве. Канонический вид матрицы нормального оператора в евклидовом пространстве. Изометрические операторы, простейшие свойства. Унитарные операторы, их собственные числа. Ортогональные операторы. Канонический вид матрицы ортогонального оператора. Самосопряженные операторы. Оператор ортогонального проектирования.   
Контрольная работа

**Модуль 17.** Тензорное произведение (10 час.л., 2 час. пр., 12 час. самост. раб.)  
Тензорное произведение модулей над коммутативным кольцом, конструкция и свойства. Изоморфизм сопряжённости. Тензорное произведение линейных пространств. Базис тензорного произведения пространств. Классические тензоры. Расширение основного поля скаляров. Комплексификация. Тензорная алгебра линейного пространства. Симметрическая алгебра.

**Модуль 18.** Алгебры (8 час.л., 2 час. пр., 10 час. самост. раб.)  
Понятие алгебры над полем. Примеры. Алгебра обобщённых и классических кватернионов. Тождество Эйлера (о произведении сумм четырёх квадратов). Теорема Фробениуса. Построение внешней алгебры, простейшие свойства. Приложение к теории определителей.

**Модуль 19.** Дополнительные главы теории чисел (12 час. л., 6 час. пр., 22 час. самост. раб.)   
Степенные вычеты. Символ Лагранжа. Квадратичный закон взаимности. Символ Якоби. Цепные дроби. Приближение вещественных чисел цепными дробями. Уравнение Пелля.   
Контрольная работа

**Модуль 20.** Топологическая алгебра (8 час. л., 4 час. пр., 10 час. самост. раб.)  
Топологические группы и кольца. База топологии. I-адическое пополнение. Кольцо целых p-адических чисел, эквивалентные определения. Лемма Гензеля. Корни из единицы в поле p-адических чисел. Теорема Минковского-Хассе.

**Модуль 21.** Представления конечных групп (18 час. л., 4 час. пр., 27 час. самост. раб.)  
Определение представления. Примеры. Регулярное представление. Прямая сумма. Неприводимые представления. Представления абелевых групп. Лемма Шура и теорема Машке. Матричные коэффициенты представлений и их ортогональность. Некоммутативное дискретное преобразование Фурье. Теорема Бернсайда. Характеры. Соотношения ортогональности, таблица характеров. Индуцированные представления. Закон взаимности Фробениуса. Инвариантные формы на представлениях. Вещественные представления, индекс Шура.  
Контрольная работа

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

не предусматривается

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Перечень примерных вопросов для самостоятельной работы студентов   
Минор произвольного порядка, дополнительный минор и алгебраическое дополнение к минору. Формулировка теоремы Лапласа.  
Многочлены с рациональными и целыми коэффициентами. Редукция целочисленного многочлена.   
Редукционный признак неприводимости, признак Эйзенштейна.   
Неприводимость целочисленного многочлена над полем рациональных чисел и неразложимость в кольце целочисленных многочленов.   
Рациональные корни целочисленного многочлена. Алгоритм разложения многочлена на неприводимые множители.  
Примеры нефакториальных колец.  
Теорема Лагранжа об эрмитовых формах.  
Кватернионы.  
Разложение натурального числа в сумму четырёх квадратов.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

**Методика проведения контрольных работ**

Контрольная работа состоит из нескольких задач по определенным темам. Количество задач зависит от номера контрольной работы и темы. Полностью не решенные задачи не зачитываются. Частично не решенная задача (пометка «+-»), может быть зачтена после собеседования с преподавателем.

**Методика проведения зачёта**

Зачёт выставляется по результатам работы в семестре на зачетном занятии.

Для получения отметки «зачтено» необходимо, чтобы были зачтены задачи по всем темам.

На зачёт отводится 2 академических часа. Во время проведения зачета обучающемуся предоставляется возможность выполнить задания по всем темам, которые не были зачтены в результате проведения текущего контроля успеваемости. Задания можно выполнять в произвольном порядке. Зачёт проводится в устно-письменной форме.

Вторая и третья (с комиссией) попытка сдачи зачёта по процедуре проведения аналогична зачётному занятию. При сдаче зачета с комиссией работа проверяется не одним, а тремя преподавателями. Преподаватель, проводивший текущий контроль успеваемости, предоставляет комиссии все материалы по текущему контролю успеваемости обучающегося.

**Методика проведения текущего контроля успеваемости в форме коллоквиума**

На подготовку к коллоквиуму выделяется один день. Коллоквиум проводится в форме устного ответа по билетам. Билет содержит два вопроса. Один из вопросов может представлять собой задачу (упражнение). На подготовку к ответу отводится не менее 1 академического часа. После ответа на основные вопросы билета, преподаватель вправе задать дополнительные вопросы по любой теме из списка вопросов, вынесенных на коллоквиум. В качестве дополнительных используются вопросы, не требующие длительного вывода и трудоемких вычислений, в том числе определения и формулировки теорем (предложений).

За ответ выставляется оценка «не удовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

В случае получения оценки «не удовлетворительно», билет с вопросами к коллоквиуму выносится на экзамен. При ответе на экзамене билетов коллоквиума и экзамена, время на подготовку устного ответа увеличивается до 2 академических часов.

**Методика проведения экзамена**

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из 2 частей и содержит 4 вопроса, 2 вопроса из списка вопросов к коллоквиуму и 2 вопроса из списка вопросов к экзамену. Каждая часть оценивается отдельно. При успешной сдаче коллоквиума, обучающемуся может быть зачтена оценка за первые 2 вопроса, и тогда на подготовку к ответу в аудитории отводится не менее 1 академического часа.

В случае получения оценки «неудовлетворительно» на коллоквиуме (или при желании обучающегося пересдать коллоквиум), по желанию обучающегося билеты могут быть выданы последовательно (билет коллоквиума, перерыв с возможностью выйти из аудитории, билет экзамена из 2 вопросов) или одновременно. При одновременном получении билетов коллоквиума и экзамена, время на подготовку устного ответа увеличивается до 2 академических часов. При последовательном получении билетов на подготовку к каждому из них отводится по 1 академическому часу.

После ответа на основные вопросы билета, преподаватель вправе задать дополнительные вопросы по любой теме из списка вопросов, вынесенных на экзамен (коллоквиум). В качестве дополнительных, используются вопросы, не требующие длительного вывода и трудоемких вычислений, в том числе определения и формулировки теорем (предложений). Также в качестве дополнительного вопроса может быть предложена задача (упражнение).

За ответ по каждой части билета выставляется оценка «не удовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

В случае получения оценки «неудовлетворительно» по одной из частей, за экзамен ставится оценка «неудовлетворительно».

В остальных случаях, оценка за экзамен выставляется в соответствии со следующей таблицей:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Оценка за часть 1  (коллоквиум) | Оценка за часть 2 | Оценка за экзамен |
| 3 | 3 | 3 |
| 3 | 4 | 4 |
| 3 | 5 | 4 |
| 4 | 3 | 3 |
| 5 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 4 |
| 4 | 5 | 5 |
| 5 | 4 | 4 |
| 5 | 5 | 5 |

Критерии выставления оценок за ответ на коллоквиуме (часть 1) и экзамене (часть 2)

Оценка «отлично» выставляется, если выполняются оба условия:

1. обучающимся даны полные исчерпывающие ответы по всем вопросам билета, обучающийся свободно ориентируется в материале;

2. обучающийся отвечает на все дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» выставляется, если выполняются оба условия

1. обучающимся дан полный ответ на один из вопросов билета, по второму вопросу написаны все определения, основные формулировки теорем (предложений) (в случае наличия);

2. обучающийся отвечает более чем на 3/4 дополнительных вопросов.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если выполняются оба условия

1. по обоим вопросам написаны все основные определения и формулировки теорем (предложений) (в случае наличия);

2. обучающийся дает правильный ответ более чем на половину заданных дополнительных вопросов.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

**1 семестр, вопросы коллоквиума**

I. Алгебраические структуры

1. Определение и свойства группы, подгруппы, примеры

2.Определение и свойства кольца, подкольца. Критерий подкольца.

3. Идеалы кольца

4. Определение поля, примеры, идеалы в поле.

5. Определение и свойства векторного пространства, примеры

6.Определение тела, алгебры над полем, свойства

7. Область целостности, евклидово кольцо, свойства, примеры

8. Кольцо Гауссовых целых чисел как пример евклидова кольца.

9.Простые и неприводимые элементы в области целостности. Свойства

10. Кольцо главных идеалов, с теоремой об евклидовом кольце

11.Определение нётерова кольца, свойства

II. Элементарная теория чисел

1. Наибольший общий делитель элементов в евклидовом кольце , существование и линейное разложение.

2. Взаимно простые элементы в евклидовом кольце, критерий.

3. Основная теорема арифметики в евклидовом кольце.

4. Факториальные кольца, примеры.

5. Пример не факториального кольца.

6. Теорема об ОГИ как факториальном кольце.

7. Бесконечность простых чисел в кольце целых чисел, варианты доказательства.

8. Определение и основные свойства сравнений в **Z**.

9. Отношение эквивалентности и фактор множество по нему.

10. Класс эквивалентности по идеалу. Идеалы в **Z**.

11. Фактор-кольцо **Z** по идеалу , теорема о делителях нуля в нём Конечное поле, как фактор-кольцо **Z** по идеалу *p***Z**.

12. Теорема Ферма в теории сравнений.

13. Теорема Эйлера в теории сравнений.

14. Решение сравнений первой степени.

15. Мультипликативные числовые функции, определение и примеры.

16. Функция Эйлера как мультипликативная числовая функция. Формула для неё.

17. Системы вычетов, полная и приведённая, свойства.

18. Китайская теорема об остатках и сведение сравнения по модулю m к сравнению по степени простого числа.

19. Лемма Гензеля и сведение сравнения по степени простого числа к первой степени.

20. Сведение сравнения для многочленов по простому модулю к сравнению для многочленов степени меньшей этого простого числа.

21. Сравнения степени 2 по простому модулю Символ Лежандра.

22. Критерий Эйлера для символа Лежандра и основные свойства для символа Лежандра.

23. Бесконечность простых чисел вида 4r +1.

24. Лемма Гаусса для символа Лежандра.

25 Квадратичный закон взаимности

III. Поле комплексных чисел

1. Определение поля комплексных чисел, Теорема о существовании и единственности ( с точностью до изоморфизма) Доказательство единственности

2. Существование поля комплексных чисел.

**1 семестр, вопросы экзамена**

I. Поле комплексных чисел

1. Единственность поля комплексных чисел.

2. Алгебраическая и тригонометрическая форма комплексного числа .

3. Модуль и аргумент, сопряжённые комплексные числа, свойства.

4. Произведение комплексных чисел в тригонометрическом виде.

5. Формула Муавра.

6. Корни *n*-й степени из комплексного числа.

7. Основная теорема алгебры.

II. Многочлены и дробно-рациональные функции

1. Многочлены над кольцами

2. Теорема о старшем члене произведения многочленов.

3. Степень произведения и суммы.

4. Дифференцирование в области целостности.

5. Производная многочлена и кратные корни.

6. Алгебраически замкнутые поля.

7. Неприводимые многочлены над полями комплексных и вещественных чисел.

8. Поле частных области целостности.

9. Поле дробно-рациональных функций. Правильные дроби.

10. Примарные дроби. Лемма о дроби, знаменатель которой разложен на два взаимно простых множителя.

11. Разложение правильной дроби в сумму правильных примарных дробей.

12. Разложение многочлена по степеням заданного неприводимого многочлена.

13. Простейшие дроби. Разложение правильной дроби в сумму простейших.

14. Формула Тэйлора.

III. Матрицы и определители.

1. Действия над матрицами и их свойства.

2. Транспонирование матриц.

3. Элементарные преобразования и элементарные матрицы.

4. Теоремы о приведении матриц элементарными преобразованиями.

5. Обратимые матрицы.

6. Перестановки. Транспозиции.

7. Чётность перестановки.

8. Определитель матрицы (геометрический и алгебраический подход).

9. Теорема о связи алгебраического и геометрического определения определителя.

10. Разложение по строке и другие свойства определителя.

11. Теорема об определителе произведения матриц.

12. Теорема об определителе ступенчатой матрицы.

13. Минорный ранг матрицы.

14. Взаимная матрица.

15. Нахождение обратной матрицы.

16. Формулы Крамера.

IV. Векторные пространства и системы линейных уравнений.

1. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

2. Понятие векторного пространства и подпространства, примеры.

3. Линейная независимость векторов.

4. Линейная оболочка.

5. Базис, эквивалентные определения, примеры.

6. Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций.

7. Размерность, основные свойства.

8. Координаты. Формула замены базиса.

9. Ранг матрицы.

10. Невырожденные матрицы.

11. Теорема Кронекера – Капелли.

12. Теорема Крамера.

13. Однородные системы.

14. Линейные отображения, ядро и образ.

15. Соотношения между размерностями ядра и образа линейного отображения.

16. Структура множества решений однородной системы линейных уравнений.

17. Сумма и пересечение подпространств.

**2 семестр, вопросы коллоквиума**

1. Решение алгебраических уравнений 3-й степени.

2. Решение алгебраических уравнений 4-й степени.

3. Логарифмическая и показательная функции.

4. Кватернионы.

5. Построение циркулем и линейкой правильных 5-угольника и 17-угольника.

6. Классическая задача деления круга на *n* частей.

7. Определитель Вандермонда. Интерполяционная задача.

8. Интерполяционная формула Лагранжа.

9. Метод Ньютона.

10. Билинейные и полуторалинейные формы, примеры.

11. Матрица Грама. Замена базиса.

12. Симметрические и эрмитовы формы.

13. Свойства ортогональных дополнений.

14. Евклидовы и унитарные пространства, примеры, простейшие свойства.

15. Неравенство Коши-Буняковского. Длина вектора и угол между векторами.

16. Ортонормированные базисы. Унитарные и ортогональные матрицы.

17. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.

18. Свойства ортогонального дополнения относительно скалярного произведения.

19. Разложение пространства в ортогональную прямую сумму подпространств.

20. Квадратичная форма как многочлен и квадратичная форма на линейном пространстве.

21. Связь между квадратичными и билинейными формами.

22. Эквивалентные квадратичные формы. Приведение к диагональному виду.

23. Эквивалентность квадратичных форм над алгебраически замкнутым полем.

24. Закон инерции вещественных квадратичных форм.

25. Собственные скаляры и собственные векторы. Характеристический многочлен матрицы.

26. Приведение вещественной симметрической билинейной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием.

**2 семестр, вопросы экзамена**

1. Подгруппы. Циклическая подгруппа, её порядок.

2. Подгруппа, порожденная заданным множеством.

3. Левые и правые смежные классы. Равенство левого и правого индекса

4. Теорема Лагранжа и следствия из неё

5. Обобщённая теорема Лагранжа.

6. Нормальные подгруппы.

7. Факторгруппа

8. Гомоморфизм, примеры. Ядро и образ гомоморфизма

9. Индуцированные гомоморфизмы. Теорема о гомоморфизме

10. 1-я теорема об изоморфизме

11. Поведение подгрупп при гомоморфизме. Подгруппы в факторгруппе

12. 2-я теорема об изоморфизме

13. Классификация циклических групп

14. Подгруппы циклических групп

15. Свободная группа

16. Гомоморфизмы свободной группы в заданную.

17. Аксиоматическое определение свободной группы, эквивалентность определений.

18. Задание группы при помощи определяющих соотношений.

19. Коммутант

20. Центр группы.

21. Действие группы на множестве. Теорема Кэли

22. Орбиты и стабилизаторы

23. Разрешимость конечной *p*-группы

24. Внешнее и внутреннее прямое произведение

25. Полупрямое произведение.

26. Теорема Коши

27. 1-я теорема Силова

28. 2-я теорема Силова

29. 3-я теорема Силова, примеры применения

30. Гомоморфизмы модулей. Теорема о гомоморфизме.

31. Эквивалентные определения базиса. Свободные модули.

32. Лемма о фактормодуле прямого произведения.

33. Инвариантность ранга свободного модуля (для случая конечного ранга).

34. Представление конечно порождённого модуля в виде фактормодуля свободного модуля.

35. Эквивалентные определения нётерова и артинова модуля.

36. Нётеровость и артиновость подмодулей, фактормодулей, прямых произведений.

37. Нётеровы и артиновы кольца. Теорема Гильберта о базисе.

38. Нётеровость конечно порождённого надкольца нётерова кольца.

39. Замена базиса в свободном модуле.

40. Подмодуль свободного модуля конечного ранга над областью главных идеалов.

41. Метод Гаусса для области главных идеалов.

42. Теорема об элементарных делителях (матричная форма).

43. Теорема об элементарных делителях (модульная форма). Следствие о строении конечно порождённых модулей.

44. Кручение в модуле над областью главных идеалов.

45. Разложение модуля кручения в прямую сумму подмодулей p-кручения.

46. Теорема о строении конечно порождённого модуля над ОГИ. Доказательство для модуля p-кручения.

47. Теорема о строении конечно порождённого модуля над ОГИ. Доказательство в общем случае.

48. Изоморфные пространства с операторами.

49. Характеристический многочлен оператора.

50. Свойства диагонализируемых операторов.

51. Достаточные условия диагонализируемости.

52. Инвариантные подпространства. Матричная характеризация.

53. Разложение в прямую сумму инвариантных подпространств.

54. Линейное пространство с оператором как модуль над кольцом многочленов.

55. Циклическое подпространство.

56. Характеристический многочлен сужения оператора на циклическое подпространство. Теорема Гамильтона — Кэли.

57. Характеристический и минимальный многочлен оператора на прямой сумме инвариантных подпространств.

58. Свойства оператора с данной жордановой матрицей.

59. Корневые подпространства.

60. Существование и единственность жордановой формы для нильпотентного оператора.

61. Существование и единственность жордановой формы в общем случае.

**3 семестр, вопросы экзамена**

1. Идеалы и операции над ними.

2. Теорема о гомоморфизме для колец.

3. Теорема о соответствии.

4. Простые и максимальные идеалы. Примеры.

5. Многочлены над факториальными кольцами. Лемма Гаусса.

6. Теорема Гаусса.

7. Редукционный критерий неприводимости.

8. Критерий неприводимости Эйзенштейна.

9. Симметрические многочлены. Теорема Виета.

10. Основная теорема о симметрических многочленах.

11. Категории. Универсальные объекты. Примеры.

12. Прямые произведения и прямые суммы. Примеры.

13. Функторы. Примеры.

14. Естественные преобразования. Примеры.

15. Характеристика поля. Простое подполе.

16. Строение простого алгебраического расширения.

17. Строение простого трансцендентного расширения.

18. Алгебраические расширения.

19. Сепарабельность.

20. Поле разложения набора многочлена.

21. Нормальные расширения.

22. Классификация конечных полей.

23. Расширения конечных полей.

24. Цикличность мультипликативной группы.

25. Теорема о примитивном элементе.

26. Основная теорема теории Галуа.

27. Свойства соответствия Галуа.

28. Норма и след.

29. Вычисление нормы и следа через сопряжённые элементы.

30. Линейная независимость характеров.

31. Теорема Гильберта 90.

32. Куммеровы расширения.

33. Круговые расширения.

34. Разрешимость в радикалах.

**4 семестр, вопросы экзамена**

1. Двойственное пространство и двойственное отображение.

2. Изоморфность пространства и дважды двойственного к нему.

3. Сопряжённые операторы в евклидовом пространстве.

4. Матрица сопряженного оператора в ортонормированном базисе.

5. Сопряжённый оператор в унитарном пространстве, его матрица.  
6. Нормальные операторы в унитарном пространстве. Примеры

7. Диагонализация матрицы нормального оператора.

8. Нормальные операторы в евклидовом пространстве. Комплексификация.

9. Канонический вид матрицы нормального оператора в евклидовом пространстве.

10. Изометрические операторы, простейшие свойства.

11. Унитарные операторы, их собственные числа.

12. Ортогональные операторы. Канонический вид матрицы.

13. Собственные ортогональные операторы в трёхмерном евклидовом пространстве.

14. Самосопряженные операторы.

15. Оператор ортогонального проектирования.

16. Тензорное произведение модулей над коммутативным кольцом, конструкция

17. Основные свойства тензорного произведения.

18. Изоморфизм сопряжённости.

19. Тензорное произведение линейных пространств. Базис.

20. Классические тензоры.

21. Расширение основного поля скаляров. Комплексификация.

22. Тензорная алгебра линейного пространства.

23. Симметрическая алгебра линейного пространства.

24. Ассоциативные алгебры. Алгебры с делением. Связь с телами.

25. Структурный тензор алгебры. Структурные тензоры изоморфных алгебр.

26. Алгебра обобщенных кватернионов. Структурные константы.

27. Классические кватернионы. Тождество Эйлера.

28. Векторная и скалярная часть кватерниона. Норма кватерниона, свойства нормы.

29. Теорема Фробениуса.

30. Внешняя степень.

31. Внешняя алгебра линейного пространства.

32. Свойства внешнего умножения векторов.

33. Определитель матрицы в терминах внешней алгебры.

34. Внешнее произведение и линейная независимость.

35. Определитель произведения.

36. Определитель ступенчатой матрицы.

37. Цепные дроби.

38. Приближение вещественных чисел цепными дробями.

39. Уравнение Пелля.

40. Топологические группы и кольца. База топология.

41. Пополнение.

42. I-адическая топология.

43. Обратный предел.

44. Кольцо *p*-адических чисел, эквивалентные определения.

45. Идеалы и обратимые элементы в кольце *p*-адических чисел

46. Лемма Гензеля.

47. Обратимые элементы в поле *p*-адических чисел.

48. Теорема Минковского-Хассе (формулировка).

49. Определение представления группы. Примеры.

50. Регулярное представление.

51. Прямая сумма. Неприводимые представления.

52. Представления абелевых групп.

53. Лемма Шура и теорема Машке.

54. Матричные коэффициенты представлений и их ортогональность.

55. Некоммутативное дискретное преобразование Фурье.

56. Теорема Бернсайда.  
57. Характеры. Соотношения ортогональности, таблица характеров.

58. Индуцированные представления. Индукция Брауэра.

59. Закон взаимности Фробениуса.

60. Инвариантные формы на представлениях.

61. Вещественные представления, индекс Шура.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Примерная анкета-отзыв по преподаванию дисциплины

Просим Вас заполнить анонимную анкету-отзыв по пройденному Вами курсу. Обобщенные данные анкет будут использованы для совершенствования преподавания. По каждому вопросу проставьте соответствующие оценки по шкале от 1 до 10 баллов (обведите выбранный Вами балл). В случае необходимости впишите свои комментарии.

1. Насколько Вы удовлетворены содержанием дисциплины в целом?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Насколько Вы удовлетворены формами преподавания?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Как Вы оцениваете качество подготовки предложенных учебно–методических материалов?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Насколько Вы удовлетворены использованием преподавателями интерактивных и активных методов обучения ?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Какие из тем дисциплины Вы считаете наиболее полезными, ценными с точки зрения дальнейшего обучения и/или применения в последующей практической деятельности?
2. Что бы Вы предложили изменить в методическом и содержательном плане для совершенствования преподавания данной дисциплины?

СПАСИБО!

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень кандидата или доктора наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности). Преподаватели, привлекаемые к проведению практических занятий, должны иметь базовое образование

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не предполагается.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Стандартно оборудованные лекционные аудитории.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Не предусматриваются.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не предусматриваются.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не предусматриваются.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Не предусматриваются.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. - СПб: Лань, 2002.

1.1 ЭБС «Лань» по подписке СПбГУ: https://proxy.library.spbu.ru:2290/book/397#book\_name

2. Боревич З.И. Определители и матрицы. – СПб: Лань, 2001.

2.1 ЭБС «Лань» по подписке СПбГУ: https://proxy.library.spbu.ru:2290/book/71#book\_name

3. Семенов А.А., Р. А. Шмидт, Начала алгебры. Ч. 1-2. - СПб, 2002. Ч. 1 – Мм – 117 экз., Ч. 2

4. Фаддеев Д.К., И. С. Соминский. Задачи по высшей алгебре. - СПб: Лань, 2007-2008.

4.1 ЭБС «Лань»: https://proxy.library.spbu.ru:2290/book/399#book\_name

5. Задачи по алгебре. Комплексные числа и многочлены. - СПб, 2011.

6. Задачи по алгебре. Основы теории чисел. - СПб, 2008.

7. Задачи по алгебре. Основы теории групп. - СПб, 1996.

8. Задачи по алгебре. Основы теории колец. - СПб, 1998.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Шмидт Р.А. Алгебра. Ч. 1-4. - СПб, 2008. Мм - Ч. 1, Ч.2 , Ч. 3, Ч. 4

2. Винберг Э.Б. Курс алгебры. - М., 2002.

3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры. - М., 2004.

4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра. - М., 2012.

5. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры. - М., 2004.

5.1 ЭБС «Лань» по подписке СПбГУ: https://proxy.library.spbu.ru:2290/book/59284#book\_name

6. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. - М., 2007.

7. Айерлэнд К., М.Роузен, Классическое введение в современную теорию чисел.- М., 1987.

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

Не предусмотрено

**Раздел 4. Разработчики программы**

Яковлев Анатолий Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор.  
Yakovlev.anatoly@gmail.com